Uitwerking puzzel 94-2

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

**Lege polygonen in een graaf**.

We hebben $n$ punten die al of niet met elkaar worden verbonden. De bedoeling is om met zo min mogelijk lijnen (=verbindingen) een figuur (graaf) te creëren waarin geen 3 (of 4) punten voorkomen die niet als een polygoon met elkaar zijn verbonden, dus geen "lege" drie- of vierhoeken. Voor kleine $n$ is dit eenvoudig, maar naarmate $n$ toeneemt wordt het allengs moeilijker.

De titel gaf helaas wat verwarring, omdat "lege polygonen" inderdaad geen standaard begrip is. We legden dit echter uit met de woorden: "Tussen elke combinatie van drie (of 4) punten van een graaf moet minstens een lijn worden getrokken." Het lege slaat dus op drie- of vierzijdige polygonen zonder lijnen.

**Opgave 1a:** Grafen zonder "lege" driehoeken.
Bepaal voor $n$ = 3 tot en met $n$ = 10 het minimum aantal benodigde lijnen en geef daarbij voor elk de verkregen figuur (graaf). Dat kan met een tekening of een tabel.
Het zou leuk zijn als je daarbij je zoek-strategie kan beschrijven.

Onder andere Bart Dopheide slaagde er in om een computer programma te schrijven die dit voor hem uitzocht. Helaas geeft dat bij grotere grafen al snel problemen.

Alle inzenders vonden de oplossing om de punten in twee groepen te verdelen die hoogstens 1 in grootte verschillen. De punten van elke groep worden allemaal met elkaar verbonden, maar geen lijnen tussen de groepen.

Voor elk drietal punten liggen er dan minstens 2 in één groep, en die zijn verbonden, zodat de bijbehorende driehoek niet "leeg" is. We weten dus zeker dat dit een oplossing is, en door de grootte van de groepen zo dicht mogelijk bij elkaar te kiezen is het aantal lijnen ook minimaal voor dit type oplossingen. Wat we (nog) niet weten is of er nog andere typen oplossingen zijn die misschien met minder lijnen toekunnen.

We hebben zo dus steeds een samengestelde graaf van twee gescheiden componenten, elk volledig verbonden. We kunnen nagaan dat er zo voor $n$ punten met $n$ even $(n^2 - 2n)/4$ lijnen zijn. Voor $n$ oneven zijn het er $(n - 1)^2/4$

Merk op dat er geen drie (of meer) gescheiden groepen kunnen zijn, dan kan kan je immers van elke groep een punt kiezen en heb je een lege driehoek.

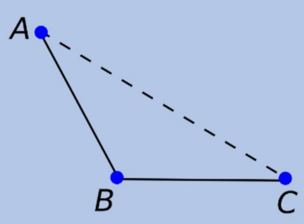
**Opgave 1b:** Zijn er voor $n$ = 6 meerdere oplossingen?
Het antwoord is: Nee, alleen een graaf bestaande uit twee gescheiden driehoeken, dus 6 lijnen. Harm Bakker en Monica Woldinga gaven een redenatie waarom er met 6 punten maar 1 oplossing is, en wel met 6 lijnen . In feite beredeneerden beide dat een mogelijke andere oplossing een samenhangende graaf moet zijn en sloten alle mogelijkheden daartoe uit. We geven hieronder het bewijs van Harm, met wel een hele originele aanpak. (We hebben de eerste zin ervan iets aangepast om het te laten aansluiten op onze tekst hierboven)

Uit opgave 1a weten we dat een oplossing voor $n = 6$ die bestaat uit twee gescheiden componenten, minimaal 6 verbindingen heeft, en dat die oplossing uniek is.
Aangezien meer dan twee componenten geen correcte graaf op kan leveren, rest te onderzoeken of we met een samenhangende graaf een oplossing kunnen vinden met 6 of minder verbindingen. STEL dat er zo'n graaf is. Dan bevat zo'n graaf een minimaal opspannende deelboom. Een boom met zes punten heeft vijf verbindingen. We gaan eerst na of dit mogelijk al genoeg is om een graaf zonder lege driehoeken te krijgen.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figuur 1: Incidentiematrix bij opspannende boom

In figuur 1 staat een incidentietabel waarmee we de redenering visualiseren. Bij elke oplossing met zes punten zijn er 20 driehoeken. Nummer deze driehoeken en nummer ook de vijf takken van de opspannende boom. Plaats een bolletje als de tak van de boom een zijde is van de betreffende driehoek. Elk van de vijf takken in de boom kan op vier verschillende manieren worden aangevuld tot een (niet-lege) driehoek. Dat betekent dat er in elke rij van de tabel vier bolletjes komen. In totaal 20 bolletjes.

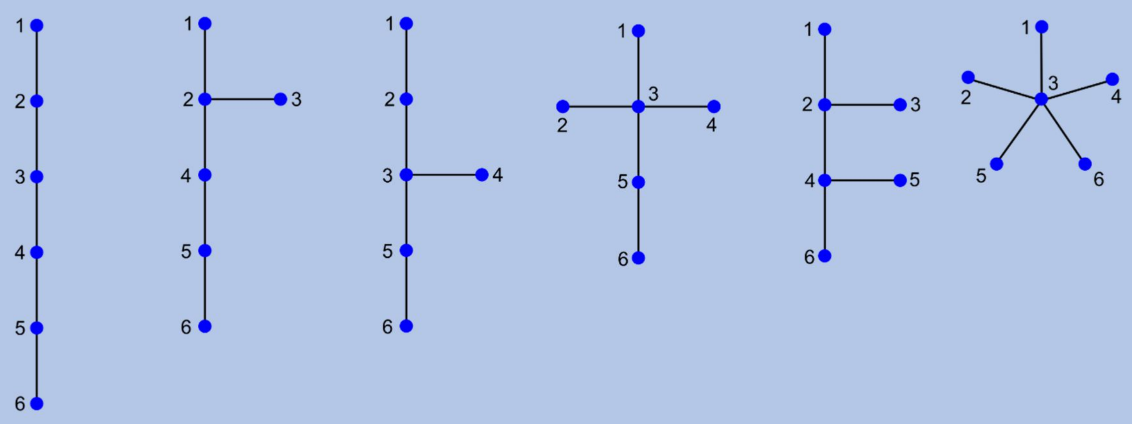



Figuur 2: Driehoek aan de boom

Kies nu twee takken AB en BC in de boom met een gezamenlijk punt B: zie figuur 2. Zowel de tak AB als de tak BC is een zijde van driehoek ABC. In de kolom van driehoek ABC komen dus twee bolletjes. Maar bij een totaal van 20 bolletjes en 20 kolommen betekentdit dat er minstens één kolom is zonder bolletje. Ofwel: er is minstens één lege driehoek.Conclusie: met een boom is geen correcte graaf met zes punten te realiseren.

*Daarmee hebben we ook aangetoond dat het niet lukt met minder dan zes verbindingen*.

De vraag is nu of het wel lukt wanneer we aan de opspannende boom één tak toevoegen.Ook deze tak behoort tot vier driehoeken, waarmee het aantal bolletjes op 24 komt.Het is een beetje primitief, maar ik zie geen elegante manier om die extra verbinding mooi te verwerken: teken maar alle mogelijke bomen met zes punten en tel het aantal lege driehoeken (zie figuur 3).




| *d*=5 | *d* =4 | *d* =4 | *d* =3 | *d* =3 | *d* =2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 135 | 134 | 136 | 124 | 134 | 124 |
| 136 | 135 | 145 | 125 | 135 | 125 |
| 146 | 136 | 146 | 126 | 136 | 126 |
| 246 | 346 | 245 | 145 | 156 | 145 |
| | 146 | 246 | 146 | 256 | 146 |
| | | | 245 | | 156 |
| | | | 246 | | 245 |
| | | | | | 246 |
| | | | | | 256 |
| | | | | | 456 |

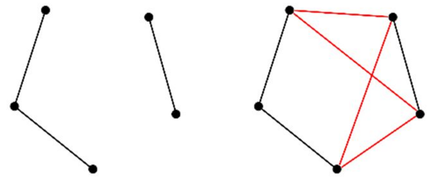
Figuur 3: Bomen met zes punten

De bomen in de figuur zijn gerangschikt naar hun diameter, d.w.z. de maximale lengte van een kortste pad. Bij elke boom zijn de lege driehoeken genoteerd.
In de incidentietabel komt een lege driehoek overeen met een lege kolom. Het toevoegen van de extra verbinding levert vier extra bolletjes, dus hoogstens vier kolommen kunnen van leeg naar niet-leeg veranderen. De bomen met meer dan vier lege driehoeken zijn dus met één extra verbinding niet correct te krijgen.

Blijft over de lineaire boom. Maar het is eenvoudig in te zien dat er geen verbinding is te vinden die in elk van deze lege driehoeken voorkomt. Dus ook in dit geval zal er altijd een lege driehoek over blijven.

Na al dit gepuzzel is de conclusie dat er geen samenhangende correcte graaf met zes punten en hoogstens zes verbindingen is, met als eindconclusie dat de in figuur 1 getoonde graaf met zes punten uniek is.

**Opgave 2a en 2b:** Zelfde vragen, maar nu voor grafen zonder lege 4-zijdige polygonen, voor $n = 4$ tot en met 10. Helaas gaven sommigen een oplossing analoog aan die voor opgave 1, maar nu met 3 gescheiden volledig verbonden componenten. We hebben geprobeerd zo'n vergissing te voorkomen met een plaatje, met weliswaar 2 gescheiden componenten. *Zie figuur 4*. Dus zelfs met 2 gescheiden componenten is er al een lege vierhoek, laat staan met 3.

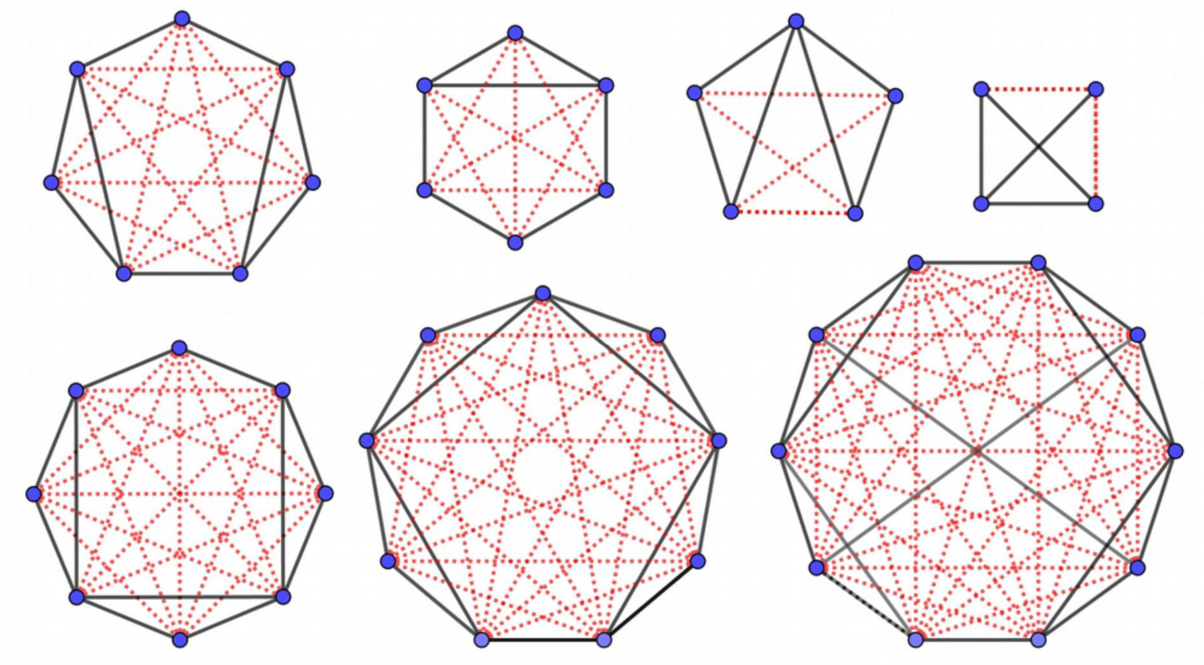


Figuur 4

Het is nu echt puzzelen om de minimale oplossingen te vinden. Met name voor grotere *n* is het makkelijker om naar de complementaire variant te kijken: Grafen zonder "hele" vierhoeken met een maximum aantal lijnen. Dat maximum van de complementaire graaf is voor $n>5$ namelijk kleiner dan het minimum van de oorspronkelijke graaf.

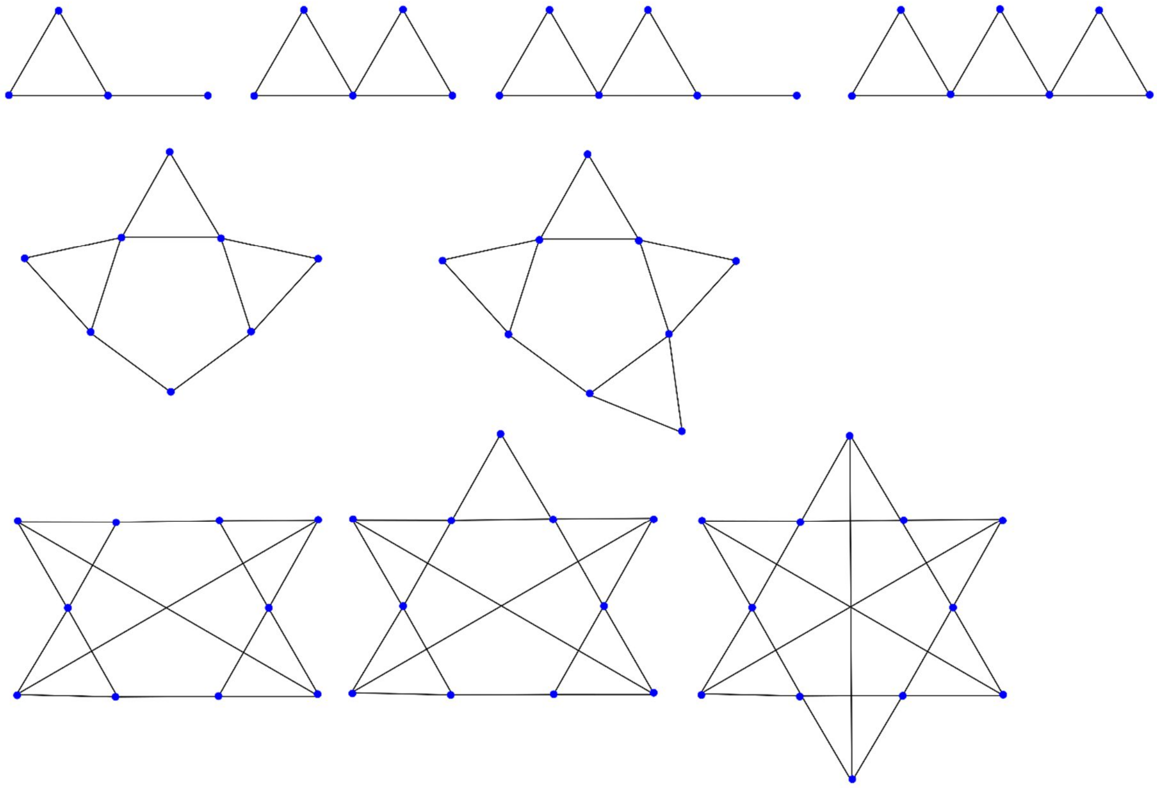
We geven hier de oplossingen van Gerard Bouwhuis. Voor $n>5$ tekende hij steeds een regelmatige *n*-hoek en zette daar zo veel mogelijk diagonalen in (zwarte lijnen). De overige lijnen (rood) vormen de oplossingen voor grafen zonder lege 4-zijdige polygonen. Hieronder een lijstje met de aantallen en daaronder de bijbehorende figuren (*figuur 5*):

| *n*= | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| minimum zonder lege 4-polygonen (rode stippellijnen in de figuur hieronder) | 2 | 4 | 8 | 12 | 17 | 23 | 29 |
| maximum zonder 4-polygonen in complement (zwarte getrokken lijnen in de figuur hieronder) | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 |
| totaal | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |



figuur 5

Een andere mogelijke aanpak is om van een oplossing voor *n* punten een oplossing voor *n* + 1 punten te maken. Soms lukt dat.  Bekijk weer de complementaire component.

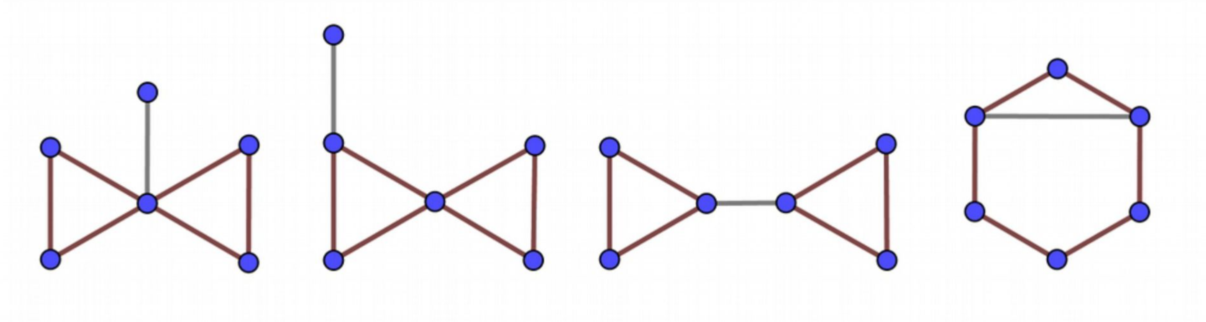


figuur 6

Voor *n* = 4 tot en met *n* = 7 krijgen we minimale oplossingen als volgt (*zie figuur 6*): We tekenen en beschrijven weer het complement: Voor *n* = 4 hebben we een driehoek met een staart. Maak van die staart een driehoek en je hebt *n* = 5. Voor *n* = 6 kan je daar weer een staart aanplakken. En voor  *n* = 7 maak je van die staart weer een driehoek. We zouden zo door kunnen gaan, maar vanaf *n* = 8 krijgen we zo geen optimale oplossing. Voor *n* = 8 kunnen we, behalve een staartje ook nog de ring sluiten met een verbindingslijntje, zodat een vijfhoek ontstaat. Om *n* = 9 te maken kan je weer een driehoek maken van één van de verbindingslijntjes van de oplossing van 8.  Voor *n* = 10 zouden we met het andere verbindingslijntje weer een driehoek kunnen maken, maar enig gepuzzel leert dat dat niet optimaal is. Het loont om van de vijfhoek een zeshoek te maken (bij 11 zou dat toch moeten). Als we zorgen dat de driehoekjes twee aan twee tegenover elkaar komen kunnen we nog twee extra diagonale lijnen trekken zonder dat een vierhoek ontstaat. Je kan zelfs nog verder gaan: Voor *n* = 11 voeg je een vijfde driehoekje toe. Voor *n* = 12 ook nog een zesde en trekt ook nog de derde diagonaal zodat je 21 lijnen hebt..

Dat dit allemaal optimale oplossingen zijn hebben we zo natuurlijk niet bewezen. Dat ze optimaal zijn blijkt wel uit per computer gevonden aantallen op de site OEIS.org onder quadrilateral free graphs. Daar zijn de aantallen lijnen tot en met *n* = 31 te vinden. Tekeningen hoe die grafen er dan uit zien staan er echter niet bij. Een enkele inzender zoals Harm Bakker vermeldt ook dat hij dat heeft gevonden. Het geeft wel wat houvast en de stimulans om verder te zoeken als je daar nog niet aan voldoet.

**Vraag 2b:** Hoeveel maximale oplossingen zijn er voor *n* = 6, dus 8 lijnen? We bekijken weer de complementaire variant: Hoeveel mogelijkheden zijn er met 7 lijnen zonder 4- zijdige polygonen? Het antwoord is 4. Zie in *figuur 7* de grafen met 7 lijnen zonder 4-zijdige polygonen.



**figuur 7**

**Extra:** Als extra vroegen we naar mogelijke bewijzen en formules.

**Grafen zonder lege driehoeken:** Voor de grafen zonder lege driehoeken is een formule door de meeste inzenders wel gevonden. Maar een sluitend bewijs dat dat aantal lijnen ook minimaal is een bovendien de enige oplossing zagen we niet. Hans Huisman gaf een keurig bewijs met inductie dat zo'n graaf zonder lege driehoeken voor elke *n* bestaat uit twee gescheiden componenten die elk volledig zijn verbonden. En het minimum aantal lijnen wordt dan bereikt als die componenten hoogstens een in grootte verschillen. Maar dan neem je aan dat je een minimale oplossing voor *n*+1 punten altijd kan afleiden van de oplossing voor *n* punten. Voor grafen zonder lege 4-polygonen is dat zeker niet het geval. Wel zie je daarmee dat meer dan twee delen geen oplossing is, dus de enige mogelijkheid zou zijn een samenhangende graaf. Harm Bakker liet zien dat dat voor *n*=6 niet lukt met 6 of minder lijnen. Enkele anderen hebben dit ook per computer uitgesloten. Maar een algemeen bewijs is dat natuurlijk niet. Een bewijs voor de complementaire variant (het maximum aantal lijnen in een graaf zonder driehoeken ) is echter op internet te vinden en dus ook bruikbaar voor onze variant zonder lege driehoeken. https://en.wikipedia.org/wiki/Turan%27s_theorem. We geven aan het eind van deze uitwerking een variant daarvan, waarin rechtstreeks wordt bewezen dat een samenhangende graaf zonder lege driehoeken nooit minimaal kan zijn.

**Grafen zonder lege vier-zijdige polygonen:** Dat de gevonden oplossingen niet altijd uniek zijn is al bewezen voor *n*=6, waar maar liefst 4 mogelijkheden zijn. Harm Bakker beschreef een bovengrens door grafen te maken waarbij een punt steeds niet is verbonden met alle andere punten. Tot en met *n*=7 vond hij daarmee zelfs de minimale oplossingen. Maar voor grotere *n* gaat het steeds meer afwijken. In de literatuur is wel iets te vinden over de complementaire variant: Het maximum aantal lijnen in grafen zonder vier-zijdige polygonen. Voor het maximale aantal lijnen f(*n*) is een formule niet bekend, maar wel een bovengrens voor bepaalde *n*. Het was al bekend dat $f(q^2+q+1) \leq \frac{q(q+1)^2}{2}$ als *q* een macht is van een priemgetal, en ook $f(n) \approx n \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}$..

Furedi bewees recent dat $f(q^2+q+1) \leq \frac{q(q+1)^2}{2}$ voor alle *q*.
https://faculty.math.illinois.edu/~z-furedi/PUBS/furedi_C4from1988.pdf

Voor *q*=2 (*n*=7) dus *f*(7)<=9 vonden wij 12 lijnen, dus inderdaad 21−12 = 9 lijnen in de complementaire variant.

## Bewijs dat een minimale graaf zonder lege driehoeken moet bestaan uit 2 volledige disjuncte deelgrafen:

In dit betoog hebben we het over grafen zonder lege driehoeken. Voor de duidelijkheid noteren we die met hoofdletters: GRAAF. We weten al dat als een minimale GRAAF niet samenhangend is, hij bestaat uit 2 disjuncte delen, waarin in elk deel alle punten met elkaar verbonden zijn. We gaan bewijzen dat een samenhangende GRAAF niet minimaal kan zijn.

### Schets van het bewijs:

[1] We laten eerst zien hoe je uit een GRAAF een punt kunt verwijderen of een punt toevoegen zodanig dat het resultaat nog steeds een GRAAF is. Door beide toe te passen krijgen we een nieuwe GRAAF met hetzelfde aantal punten.

[2] We bewijzen dan (uit het ongerijmde en met behulp van methode [1]) dat in een minimale GRAAF alle punten van een samenhangende deelverzameling van dezelfde graad zijn (= evenveel verbindingen hebben).

Bij de oplossingen die we krijgen met een GRAAF die bestaat uit twee disjuncte delen waarin in elk van de delen alle punten met elkaar verbonden zijn klopt dat. Maar we weten nu dat het ook geldt voor eventuele minimale samenhangende GRAFEN.

[3] Daarna bewijzen we dat als we een samenhangende (niet volledige) GRAAF hebben waarin alle punten van dezelfde graad zijn we die kunnen omzetten in een GRAAF met hetzelfde aantal verbindingen waarin verbonden punten voorkomen die niet van dezelfde graad zijn.

Maar we weten uit [2] dat zo'n GRAAF niet minimaal kan zijn, en dus was de GRAAF waarmee we begonnen dat ook niet.

Conclusie uit [2] en [3]: een samenhangende GRAAF kan niet minimaal zijn en dus resteert de unieke minimale oplossing met twee disjuncte volledig verbonden deelgrafen van gelijke of bijna gelijke grootte.
(Dat we het bewijzen voor een niet-volledige GRAAF is geen probleem: een samenhangende volledige GRAAF is zeker niet minimaal!)

### Bewijzen

[1] a: **Als je uit een GRAAF een punt (met al zijn verbindingen) verwijdert, dan is het nog steeds een GRAAF**.

Dit is gemakkelijk in te zien: alle driehoeken in de nieuwe graaf bestonden ook in de oude, en omdat ze in de oude GRAAF niet leeg zijn, zijn ze dat ook niet in de nieuwe.

b: **Als je aan een GRAAF een punt *P* toevoegt dat je met dezelfde punten verbindt als een bestaande punt *Q* en je voegt de verbinding *PQ* toe dan is het resultaat weer een GRAAF**.

Ook dit is gemakkelijk in te zien: alle nieuwe drietallen punten bevatten natuurlijk *P*. Driehoeken XYP bevatten evenveel verbindingen als XYQ en zijn dus niet leeg. En driehoeken PQX bevatten in elk geval *PQ*.

[2] **Bewijs uit het ongerijmde dat in een minimale GRAAF alle punten van een samenhangende deelverzameling dezelfde graad hebben.**

Stel dat we een minimale GRAAF hebben waarin de punten $P$ en $Q$ met elkaar verbonden zijn, en waarin $P$ in totaal $p$ verbindingen heeft en $Q$ in totaal $q$ verbindingen, met $p > q$.

We verwijderen eerst $P$, en daarbij verdwijnen $p$ verbindingen, en hebben we een GRAAF , waarin $Q$ nu $q - 1$ verbindingen heeft.
Daarna voegen we een nieuw punt $P$ toe dat we verbinden met alle punten waarmee $Q$ verbonden is en met $Q$ zelf. Er komen dus $q$ verbindingen bij, en omdat $p > q$ hebben we nu een GRAAF met minder verbindingen dan in de oorspronkelijke minimale GRAAF. Dat is een tegenspraak.

Dus in een minimale GRAAF hebben alle punten die met elkaar verbonden zijn dezelfde graad, en dus hebben alle punten van een samenhangende deelverzameling dezelfde graad.

[3] **Bewijs dat als we een samenhangende niet volledige GRAAF hebben waarin alle punten dezelfde graad hebben we die kunnen omzetten in een GRAAF met hetzelfde aantal verbindingen maar waarin verbonden punten voorkomen die niet dezelfde graad hebben.**

Stel we hebben een samenhangende niet volledige GRAAF waarin alle punten dezelfde graad $p$ hebben.
Dan zijn er zeker drietallen punten $P$-$Q$-$R$ waarbij $Q$ verbonden is met $P$ en $R$, maar waarbij $P$ en $R$ niet verbonden zijn.

Immers, zodra het kortste pad tussen twee punten de lengte 2 heeft hebben we zo'n drietal. Omdat de GRAAF samenhangend is is er tussen elk tweetal punten een kortste pad, en omdat de GRAAF niet volledig is zijn niet alle lengten van die paden 1. En als er een kortste pad $\geq 2$ is, dan zijn er op die keten punten op afstand 2.

$Q$ heeft dan $p - 2$ verbindingen "naar buiten", terwijl $P$ en $R$ elk $p - 1$ verbindingen "naar buiten" hebben.
We verwijderen nu $P$, en voegen daarna een nieuwe $P$ toe, met dezelfde verbindingen als $Q$ (waaronder die met $R$) en met een verbinding met $Q$.

Dan is het totaal aantal verbindingen "naar buiten" van $P$, $Q$ en $R$ één minder dan in het origineel ($R$ heeft er nog steeds $p - 1$, $P$ en $Q$ hebben er nu elk $p - 2$) en het aantal verbindingen tussen $P$, $Q$ en $R$ is met één toegenomen (ze zijn nu alle drie met elkaar verbonden). Het totaal aantal verbindingen in de GRAAF blijft dus gelijk.
$P$ en $Q$ hebben nog steeds $p$ verbindingen, maar $R$ heeft er nu $p + 1$

Zoals te bewijzen was hebben we de oorspronkelijke GRAAF omgezet in een GRAAF met hetzelfde aantal verbindingen, maar er zijn met elkaar verbonden punten met verschillende aantallen verbindingen.

## Slotopmerking:

Als we beginnen met een samenhangende GRAAF (we weten nu dat die niet minimaal kan zijn) dan kunnen we volgens de hier gebruikte recepten het aantal verbindingen stapje voor stapje

verminderen. Natuurlijk zal dan op enig moment bij één van de vervangingen de GRAAF uiteenvallen in 2 disjuncte delen die elk maximaal verbonden zijn.